SUCESIONES

1. El límite de la sucesión de término general $a_n = \left(\dfrac{n^4+2n-1}{3n^4+2n}\right)^{2n^2+3}$ **vale:**

A) ∞
B) e^{-12}
C) 0

(Convocatoria junio 2001. Examen tipo G)

SOLUCIÓN:

El límite de una potencia es igual al límite de la base elevado al límite del exponente.

Límite de la base: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4+2n-1}{3n^4+2n} = \dfrac{1}{3}$

Límite del exponente: $\lim\limits_{n\to\infty} (2n^3+3) = \infty$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty} = 0$$

La opción C) es la correcta.

Muy importante: Un número mayor que la unidad elevado a ∞ es igual a ∞. Un número menor que la unidad elevado a ∞ es igual a 0 La unidad elevada a ∞ es una indeterminación.

2. El límite de la sucesión de término general $a_n = \dfrac{\sqrt{16n^4-4}}{n\sqrt{4n^2+5}}$ **vale:**

A) 2
B) ∞
C) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(Convocatoria junio 2001. Examen tipo I)

SOLUCIÓN:

Antes de calcular el límite propuesto es conveniente realizar las siguientes transformaciones:
1. Introducir la n del denominador dentro de la raíz cuadrada
2. Poner la expresión bajo un solo signo radical.

$$a_n = \frac{\sqrt{16n^4 - 4}}{n\sqrt{4n^2 + 5}} = \frac{\sqrt{16n^4 - 4}}{\sqrt{4n^4 + 5n^2}} = \sqrt{\frac{16n^4 - 4}{4n^4 + 5n^2}}$$

A continuación procedemos a calcular el límite propuesto teniendo en cuenta que el límite de una raíz es igual a la raíz del límite.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{16n^4 - 4}{4n^4 + 5n^2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{16n^4 - 4}{4n^4 + 5n^2}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$$

La opción A) es la correcta.

3. El límite de la sucesión de término general $a_n = \frac{\sqrt{9n^4 - 9}}{3n\sqrt{4n^2 - 4}}$ **vale:**

A) $\frac{3}{4}$

B) $\frac{3}{2}$

C) $\frac{1}{2}$

(Convocatoria septiembre 2001. Examen tipo A)

SOLUCIÓN:

Siguiendo el proceso del ejercicio anterior obtenemos:

$$a_n = \frac{\sqrt{9n^4 - 9}}{3n\sqrt{4n^2 - 4}} = \frac{\sqrt{9n^4 - 9}}{\sqrt{36n^4 - 36n^2}} = \sqrt{\frac{9n^4 - 9}{36n^4 - 36n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{9n^4 - 9}{36n^4 - 36n^2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{9n^4 - 9}{36n^4 - 36n^2}} = \sqrt{\frac{9}{36}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

La opción C) es la correcta.

4. El valor de $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 - 3n + 2}{n^2 + 4n} \right)^{3n-1}$ **es:**

A) e^{-7}
B) e^{-21}
C) e^{-14}
D) e^{-28}

(Convocatoria junio 2001. Examen tipo F)

SOLUCIÓN:

Límite de la base: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-3n+2}{n^2+4n} = \frac{1}{1} = 1$

Límite del exponente: $\lim\limits_{n\to\infty}(3n-1) = \infty$

Es un límite de la forma 1^∞ que se resuelve buscando el número e.

El resultado es: $\boxed{e^{lím(\exp onente.(base-1))}}$

$$\exp onente(base-1) = (3n-1)\left(\frac{n^2-3n+2}{n^2+4n}-1\right) = (3n-1).\frac{n^2-3n+2-(n^2+4n)}{n^2+4n} =$$

$$(3n-1)\frac{n^2-3n+2-n^2-4n}{n^2+4n} = (3n-1)\frac{-7n+2}{n^2+4n} = \frac{-21n^2+6n-7n-2}{n^2+4n} = \frac{-21n^2-n-2}{n^2+4n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-21n^2-n-2}{n^2+4n} = \frac{-21}{1} = -21$$

Por tanto, el límite buscado es e^{-21}

La opción B) es la correcta.

5. El límite de la sucesión de término general $a_n = \dfrac{2n^4-3n^2+7}{\sqrt{n^9+6n^5-3}}$ vale:

$A)$ 2. $B)$ $\sqrt{2}$. $C)$ 0. $D)$ $+\infty$

(Convocatoria junio 2003. Examen tipo A)

SOLUCIÓN:

Hemos de tener en cuenta que en el cálculo de límites de sucesiones solo intervienen los términos de mayor grado, por tanto, los demás términos podemos olvidarlos.

Poniendo todo el término general bajo el signo radical tenemos:

$$a_n = \frac{2n^4-3n^2+7}{\sqrt{n^9+6n^5-3}} = \frac{\sqrt{(2n^4-3n^2+7)^2}}{\sqrt{n^9+6n^5-3}} = \sqrt{\frac{(2n^4-3n^2+7)^2}{n^9+6n^5-3}} = \sqrt{\frac{4n^8+......}{n^9+6n^5-3}}$$

$$lím a_n = \sqrt{lím\frac{0n^9+4n^8+....}{n^9+6n^5-3}} = \sqrt{\frac{0}{1}} = \sqrt{0} = 0$$

La opción C) es la correcta.

6. El límite de la sucesión de término general $a_n = \dfrac{12n^2\sqrt{n^2-7n}}{\sqrt{9n^6+5n}}$ **vale:**

$A)\ +\infty$ $B)\ 0$ $C)\ 12$ $D)\ 4$

(Convocatoria junio 2003. Examen tipo J)

SOLUCIÓN:

$$a_n = \frac{12n^2\sqrt{n^2-7n}}{\sqrt{9n^6+5n}} = \frac{\sqrt{144n^6-1008n^2}}{\sqrt{9n^6+5n}} = \sqrt{\frac{144n^6-1008n^2}{9n^6+5n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{144n^6-1008n^2}{9n^6+5n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{144n^6-1008n^2}{9n^6+5n}}\sqrt{\frac{144}{9}} = \frac{12}{3} = 4$$

La opción D) es la correcta.

7. El valor de $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^4-6n-7}{2n^4+n^2-4}\right)^{-n^2+1}$ **es:**

$A)\ e^{\frac{1}{3}}$ $B)\ e^{-\frac{1}{3}}$ $C)\ e^{-\frac{1}{2}}$ $D)\ e^{\frac{1}{2}}$

(Convocatoria septiembre 2003. Examen tipo A)

SOLUCIÓN:

Límite de la base: $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^4-6n-7}{2n^4+n^2-4} = \dfrac{2}{2} = 1$. Límite del exponente: $\lim_{n\to\infty}(-n^2+1) = -\infty$

Es un límite de la forma $1^{-\infty}$ que se resuelve buscando el número e.

El resultado es: $\boxed{e^{\lim(\text{exponente}.(\text{base}-1))}}$

$$\text{exponente}(\text{base}-1) = (-n^2+1)\left(\frac{2n^4-6n-7}{2n^4+n^2-4}-1\right) = (-n^2+1)\frac{2n^4-6n-7-2n^4-n^2+4}{2n^4+n^2-4} =$$

$$= (-n^2+1)\frac{-n^2-6n-3}{2n^4+n^2-4} = \frac{(-n^2+1)(-n^2-6n-3)}{2n^4+n^2-4} = \frac{n^4+6n^3+.......}{2n^4+n^2-4} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, el límite buscado es $e^{\frac{1}{2}}$

La opción D) es la correcta.

8. El límite de la sucesión de término general $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{4n^2-2}}{7n-1+\sqrt{9n^2+2}}$ vale:

$A)-\dfrac{2}{9}$ $\quad B)\ \dfrac{1}{9}$ $\quad C)\ -\dfrac{1}{5}$ $\quad D)\ -\dfrac{1}{10}$

(Convocatoria junio 2004. Examen tipo A)

<u>SOLUCIÓN:</u>

Dividimos numerador y denominador por n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{4n^2-2}}{7n-1+\sqrt{9n^2+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{4n^2}{n^2}-\frac{2}{n^2}}}{\frac{7n}{n}-\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{9n^2}{n^2}+\frac{2}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{4-\frac{2}{n^2}}}{7-\frac{1}{n}+\sqrt{9+\frac{2}{n^2}}}$$

Pero cuando $n\to\infty$, $\dfrac{1}{n^2}\to 0$, $\dfrac{2}{n^2}\to 0$ y $\dfrac{1}{n}\to 0$, por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1-\sqrt{4}}{7+\sqrt{9}} = \frac{1-2}{7+3} = -\frac{1}{10}$$

La opción D) es la correcta.

9. El límite de la sucesión de término general $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{9n^2-2}}{3n-2+\sqrt{4n^2-5}}$ vale:

$A)-\dfrac{2}{3}$ $\quad B)\ 0$ $\quad C)\ -\dfrac{2}{5}$ $\quad D)\ -\infty$

(Convocatoria septiembre 2004. Examen tipo E)

<u>SOLUCIÓN:</u>

Dividimos numerador y denominador por n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{9n^2-2}}{3n-2+\sqrt{4n^2-5}} = \frac{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{9n^2}{n^2}-\frac{2}{n^2}}}{\frac{3n}{n}-\frac{2}{n}+\sqrt{\frac{4n^2}{n^2}-\frac{5}{n^2}}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{9-\frac{2}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}+\sqrt{4-\frac{5}{n^2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1}-\sqrt{9}}{3+\sqrt{4}} = \frac{1-3}{3+2} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$$

La opción D) es la correcta.

10. El límite de la sucesión de término general $a_n = \sqrt{n^2+6n} - \sqrt{n^2+2n-1}$ vale:

$A)\ 2$ $B)\ -1$ $C)\ 0$ $D)\ \infty$

(Convocatoria septiembre 2004. Examen tipo G)

SOLUCIÓN:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+6n} - \sqrt{n^2+2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+6n} - \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n-1} = \infty - \infty$ (Indeterminación).

Los límites de la forma $\infty - \infty$ se resuelven multiplicando y dividiendo por el conjugado.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+6n} - \sqrt{n^2+2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+6n} - \sqrt{n^2+2n-1})(\sqrt{n^2+6n} + \sqrt{n^2+2n-1})}{\sqrt{n^2+6n} + \sqrt{n^2+2n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+6n})^2 - (\sqrt{n^2+2n-1})^2}{\sqrt{n^2+6n} + \sqrt{n^2+2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+6n-n^2-2n+1}{\sqrt{n^2+6n} + \sqrt{n^2+2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{\sqrt{n^2+6n} + \sqrt{n^2+2n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n}{n} + \frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{6n}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} - \frac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}} = \frac{4}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{4}{2} = 2$$

La opción A) es la correcta.

11. El límite de la sucesión de término general $a_n = \dfrac{-6n^3+3n^2-4}{5n^2+5n+2}$ vale:

A) $-\infty$ **B)** $-\dfrac{5}{6}$ **C)** 0 **D) Ninguna de las anteriores respuestas.**

(Convocatoria junio 2005. Examen tipo D)

SOLUCIÓN:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-6n^3+3n^2-4}{5n^2+5n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-6n^3+3n^2-4}{0n^3+5n^2+5n+2} = \dfrac{-6}{0} = -\infty$. La solución es negativa porque los términos de mayor grado del numerador y denominador son de signo contrario.

La opción A) es la correcta.

12. El límite de la sucesión de término general $a_n = \dfrac{4n^3+2n^2-5n}{3n^4-3n^3+5}$ vale:

A) ∞ **B)** $\dfrac{4}{3}$ **C)** 0 **D) Ninguna de las anteriores respuestas.**

(Convocatoria junio 2005. Examen tipo J)

SOLUCIÓN:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+2n^2-5n}{3n^4-3n^3+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{0n^4+4n^3+2n^2-5n}{3n^4-3n^3+5} = \frac{0}{3} = 0$$

La opción C) es la correcta.

13. El límite de la sucesión de término general $a_n = \dfrac{4n^3+2n^2-5n}{3n^4-3n^3+5}$ vale:

A) 0 **B)** ∞ **C)** $\dfrac{3}{5}$ **D) Ninguna de las anteriores respuestas.**

(Convocatoria septiembre 2005. Examen tipo C)

SOLUCIÓN:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+2n^2-5n}{3n^4-3n^3+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{0n^4+4n^3+2n^2-5n}{3n^4-3n^3+5} = \frac{0}{3} = 0$$

La opción A) es la correcta.

14. El límite de la sucesión de término general $a_n = \left(\dfrac{2n^2+n+1}{n^2+3n}\right)^{3n+1}$ vale:

A) e^{-6} **B)** ∞ **C)** e^{6} **D) Ninguna de las anteriores respuestas.**

(Convocatoria 2006)

SOLUCIÓN:

El límite de una potencia es igual al límite de la base elevado al límite del exponente.

Límite de la base: $\underset{n\to\infty}{lím}\dfrac{2n^2+n+1}{n^2+3n}=\dfrac{2}{1}=2$

Límite del exponente: $\underset{n\to\infty}{lím}(3n+1)=\infty$

$$\underset{n\to\infty}{lím}\left(\frac{2n^2+n+1}{n^2+3n}\right)^{3n+1}=2^{\infty}=\infty$$

Recordemos que cualquier número mayor que la unidad elevado a ∞ es ∞.

La opción B) es la correcta.

15. El límite de la sucesión de término general $a_n=\left(\dfrac{n^3-3n+2}{2n^2+5n}\right)^{3n^2+2}$ **vale:**

A) ∞ **B)** $\dfrac{1}{2}$ **C)** 0 **D) Ninguna de las anteriores respuestas.**

SOLUCIÓN:

Límite de la base: $\underset{n\to\infty}{lím}\dfrac{n^3-3n+2}{2n^2+5n}=\underset{n\to\infty}{lím}\dfrac{n^3-3n+2}{0n^3+2n^2+5n}=\dfrac{1}{0}=\infty$

Límite del exponente: $\underset{n\to\infty}{lím}(3n^2+2)=\infty$

$$\underset{n\to\infty}{lím}\left(\frac{n^3-3n+2}{2n^2+5n}\right)^{3n^2+2}=\infty^{\infty}=\infty$$

La opción A) es la correcta.

16. El límite de la sucesión de término general $a_n=\dfrac{n^4+n^2+1}{-n^2+2n}$ **vale:**

A) -1 **B)** $-\infty$ **C)** 0 **D) Ninguna de las anteriores respuestas.**

SOLUCIÓN:

Como los términos de mayor grado del numerador y denominador son de signo contrario, el resultado será negativo:

$$\underset{n\to\infty}{lím}\frac{n^4+n^2+1}{-n^2+2n}=\underset{n\to\infty}{lím}\frac{n^4+n^2+1}{0n^4-n^2+2n}=\frac{1}{0}=-\infty$$

La opción B) es la correcta.