

## DETERMINANTES

1. **Calcula el determinante de la siguiente matriz:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 \cdot 0 - 2 \cdot 0) = 1 \cdot 0 = 0$$

Hemos sumado a la segunda fila la primera cambiada de signo.

A continuación hemos sumado a la tercera fila la primera cambiada de signo.

Después lo hemos desarrollado por los adjuntos de la primera columna llegando a un determinante de orden 2 cuyo cálculo es muy sencillo.

2. **Resuelve el siguiente determinante aplicando la regla de Sarrus:**

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Tomamos como positivos los siguientes productos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

Y negativos estos otros:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Es decir, } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 10 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 5 \cdot 10 + (-2) \cdot 6 \cdot (-7) + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot (-7) - 6 \cdot 8 \cdot 1 - 10 \cdot 4 \cdot (-2) = \\ &= 50 + 84 + 96 + 105 - 48 + 80 = 367 \end{aligned}$$

3. **El determinante de la matriz**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$  **es:**

A)  $4 \times 4$ .

B) 30.

C) -158.

D) 2.

SOLUCIÓN:

Hacemos en primer lugar las siguientes transformaciones:

1°. A la tercera fila le sumamos la primera multiplicada por  $-2$ .

2°. A la cuarta fila le sumamos la primera multiplicada por  $-3$ .

El determinante queda de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & -2 \end{vmatrix}$$

Hemos aplicado la siguiente propiedad:

Si a una fila o columna le sumamos otra multiplicada por un número, el valor del determinante no varía.

Ahora lo desarrollamos por los adjuntos de la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot 4 \cdot 8 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) - 8 \cdot (-3) \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) =$$

$$= -24 - 6 - 64 + 8 + 72 + 16 = 2 \quad (\text{Hemos aplicado finalmente a regla de Sarrus})$$

**La opción correcta es la D)**

4. La matriz adjunta de  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , con  $a, b, c$  y  $d$  números reales, es:

- A)  $\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$     B)  $ad - bc$     C)  $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$     D)  $\begin{bmatrix} a \cdot d & c \\ b & 1 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN:

Hallamos los adjuntos de cada uno de los elementos de la matriz dada:

$$A_{11} = d \qquad A_{12} = -c$$

$$A_{21} = -b \qquad A_{22} = a$$

$$\text{Matriz adjunta: } Adj(A) = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

**La opción correcta es la A)**

**PARA RECORDAR:** Adjunto de un elemento de una matriz es el determinante de la matriz que resulta al suprimir la fila y la columna a la que pertenece el elemento, precedido del signo + o - según que la suma de la fila y la columna sea par o impar.

5. Halla la matriz adjunta de  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN:

Se obtiene formando una matriz con todos los adjuntos:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -17; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$\text{Matriz adjunta: } Adj(A) = \begin{bmatrix} -17 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & -10 \\ 4 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

6. El rango de la matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  es:

- A) 3x3.      B) 0.      C) 3.      D) 2

SOLUCIÓN:

Los determinantes sirven también para hallar el rango de una matriz.

Se procede de la forma siguiente:

Hallamos el determinante. Si es distinto de 0, el rango es 3, es decir, el orden de la matriz.

Si es 0, buscamos todos los determinantes de orden 2 que pueden formarse con los elementos de la matriz dada. Si alguno de ellos es distinto de 0, el rango es 2. Y así sucesivamente.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - 1 - 0 - 0 = 0 \quad \boxed{\text{El rango no puede ser 3}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{Puede formarse un determinante de orden 2 distinto de cero.}} \quad \text{El rango es 2}$$

**La opción correcta es la D)**

7. Calcula el rango de la siguiente matriz:  $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN:

Es claro que una matriz de dos filas tendrá de rango 1 ó 2.

Buscando matrices de orden 2 que pueden formarse, vemos que podemos encontrar una, la señalada en el cuadro de color rojo, cuyo determinante es distinto de cero; por tanto, el rango es 2.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & \boxed{3} & \boxed{1} \\ 4 & 4 & 4 & \boxed{4} & \boxed{-3} \end{bmatrix}$$

**Solución:**  $\text{rang}(A) = 2$

8. Halla la matriz inversa de  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN:

Dada una matriz cuadrada  $A$  cuyo determinante es  $\neq 0$ , matriz inversa de  $A$  es la matriz que multiplicada por ella da la matriz identidad. Se expresa por  $A^{-1}$ .

Para calcularla procedemos de la siguiente forma:

1°. Calculamos el determinante de  $A$ :  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1$

2°. Hallamos los adjuntos de la matriz dada:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 0; & A_{12} &= -(-1) = 1 \\ A_{21} &= -1; & A_{22} &= 2 \end{aligned}$$

Matriz adjunta de  $A$ :  $\text{Adjunta}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

3°. La inversa se obtiene tomando la traspuesta de la matriz adjunta obtenida y dividiendo por el determinante de  $A$ :

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Solución:**  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Podemos comprobar que  $A$  multiplicada por su inversa  $A^{-1}$ , da la matriz identidad:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

**Muy importante:** para que exista inversa de  $A$  su determinante tiene que ser distinto de cero.

**9. Resuelve por la regla de Cramer el sistema siguiente:**

$$\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$$

**SOLUCIÓN:**

Es necesario conocer los siguientes determinantes:

Determinante del sistema: Es el formado por los coeficientes de las incógnitas.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1$$

Determinante de la incógnita  $x$ : Se sustituye en el determinante del sistema la columna de los coeficientes de  $x$  por la columna de los términos independientes:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 4 - (-15) = 4 + 15 = 19$$

Determinante de la incógnita  $y$ : Se sustituye en el determinante del sistema la columna de los coeficientes de  $y$  por la columna de los términos independientes:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -25 - 6 = -31$$

Una vez calculados los determinantes, las soluciones serán:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{19}{1} = 19; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-31}{1} = -31$$

**10. Halla la inversa de la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$**

**SOLUCIÓN:**

Hallamos en primer lugar el determinante de la matriz:  $|A| = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$

Calculamos los adjuntos de la matriz dada:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

La inversa se obtiene formando una matriz con los adjuntos obtenidos pero cambiando filas por columnas, y dividiendo por el determinante de  $A$ :

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$